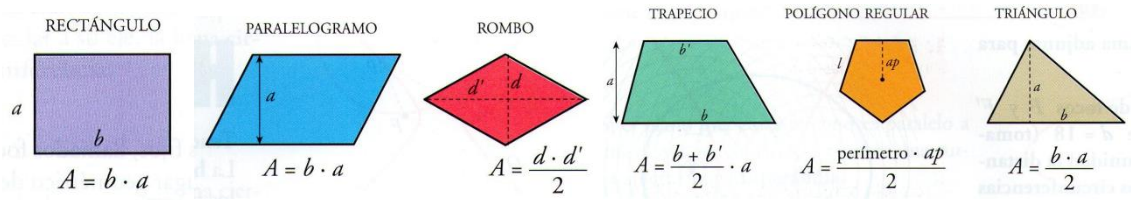
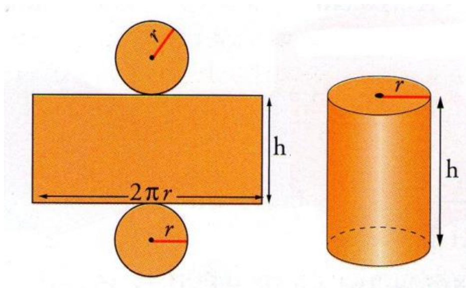
PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS



ÁREA Y VOLUMEN DE FIGURAS TRIDIMENSIONALES

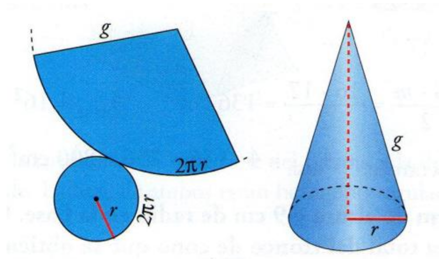
CILINDRO



$$Área = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

$$Volumen = \pi r^2 h$$

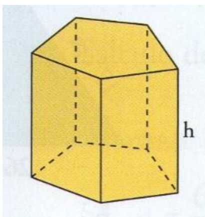
CONO



$$Área = \pi rg + \pi r^2$$

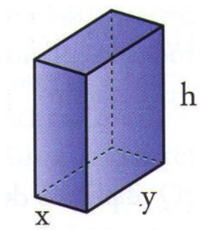
$$Volumen = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

PRISMA



$$Volumen = A_{base} \cdot h$$

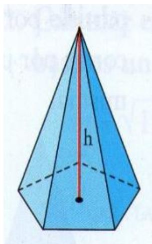
ORTOEDRO



$$Área = 2xy + 2yh + 2xh$$

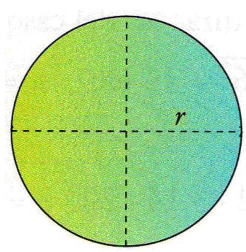
$$Volumen = x \cdot y \cdot h$$

PIRAMIDE



$$Volumen = \frac{A_{base} \cdot h}{3}$$

CÍRCULO (Figura Plana)



$$Longitud = 2\pi r$$

$$Área = \pi r^2$$

ECONOMIA:

$$\left.\begin{array}{l} Ingreso = Precio \cdot Cantidad \\ Costetotal = Costeunidad \cdot Cantidad \end{array}\right\} \quad Beneficio = Ingreso - Coste$$

¿Cómo resolver un problema?

1.- Hacer una representación
2.- Escribir todos los datos
3.- Halla la función a optimizar (f)
4.- De los datos despejar y para sustituirla en f
5.- Derivar $f(x)$ e igualar a 0, representar en la recta real los intervalos de crecimiento y decrecimiento para encontrar el máximo (o mínimo) y borrar la derivada.

1.-El rendimiento físico de un deportista de élite ante determinado esfuerzo muscular, evaluado en una escala de 0 a 100, durante un tiempo de 60 minutos viene dado por:

$$f(x)=\begin{cases} -t\cdot(t-20) & 0\le t<15 \\ 75 & 15\le t<30 \\ 100-at & 30\le t\le 60 \end{cases}$$ Calcula a para que la función sea continua.

Calcula el instante en el que el rendimiento es mayor y cuando es menor.

2.- Minimiza el precio de dos cuadrados sabiendo que uno tiene un precio de 3€/m^2 y el otro a 2€/m^2 y la suma de los perímetros de los dos cuadrados es de 400m.

3.- El beneficio estimado, en miles de euros, para un empresa durante los próximos años (x), viene dado por la función: $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & si \quad 0\le x\le 4 \\ 6x-19 & si \quad x>4 \end{cases}$,

a) Calcula a, b y c para que f sea derivable y en un principio tenga 3000€ de pérdidas.

b) ¿Cuándo deja de tener pérdidas la empresa?

c) Estudia la monotonía de $f(x)$ y el beneficio máximo en los seis primeros años $[0,6]$.

4*.-A una carpintería le cuesta producir una silla 80€. Si vende cada silla a 90€ tendrá unas ventas de 180 sillas y, por cada euro que aumente este precio el número de ventas disminuirá en 6 sillas. Calcula el precio que produce el máximo beneficio, dicho beneficio máximo y el número sillas vendidas. **Sol. 120 sillas a 100€**

5*.- Una empresa ha estimado que los gastos anuales que genera la fabricación y x unidades dado por la función $G(x)=44x^2+12000x+600000$ €, y los ingresos por unidad: $I(x)=28x+36000$. Determina la función de beneficio anual y el número de unidades que hay que vender para que el beneficio sea máximo, sabiendo además, que tiene un gasto fijo de 100.000€

6*.- Alex compra móviles a China a 300€ la unidad. Además, sabe que a 420€ la unidad vende 50 unidades y, por cada 3€ de descuento en el precio vende 5 unidades más. Halla el precio de venta del móvil para obtener el máximo beneficio posible.

7*.- Se quiere construir el marco de una ventana rectangular de 80 m^2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 16€/metro y el de tramo vertical 25€/metro.

a) Calcula las dimensiones de una ventana para que el coste del marco sea mínimo.

b) Calcula dicho coste mínimo.

8*.- El encargado del alquiler de hamacas de una playa ha comprobado que, cobrando la hora a 5€ vende diariamente 200 horas y, por cada 10 céntimos que aumenta el precio vende dos horas menos al día. El ayuntamiento le cobra un canon de 4€/hora de hamaca.

a) ¿A qué precio por hora obtendrá el máximo el beneficio diario del encargado?

b) Para dicho precio, ¿cuántas horas venderá? ¿A cuánto ascenderá el beneficio?

c) ¿En qué intervalo debe mantener el precio para obtener beneficios positivos?

9.- Se desea dividir un alambre de 90metros en dos partes, de manera que formamos dos cuadrados con ambos trozos de alambre ¿Cuánto ha de medir cada trozo para que la suma del área de un cuadrado con el perímetro del otro sea la mínima posible?

10*.- En una industria se producen recambios de piezas de automóvil. Un estudio de mercado refleja que el coste total de producción de x piezas (en euros) viene dado por la función $C(x) = 3200 + 20x + 2x^2$.

a) ¿Cuántas piezas se han de producir para que el coste unitario sea el mínimo posible? ¿A cuánto asciende dicho coste unitario?

b) A partir de esa producción que minimiza el coste unitario, cuántas piezas se han de fabricar para que el coste unitario sea superior a 198€.

c) ¿Qué ocurre a medida que dicha industria construye más y más piezas?

11.- Halla dos números positivos, tales que, la suma de ambos sea 12 y la suma del cubo del primero y del triple del cuadrado del segundo sea lo más pequeña posible.

12.- Un granjero dispone de 3000€ para cercar una porción rectangular de terreno adyacente a un río y así se ahorrará la valla correspondiente al lado del río. El coste de la cerca paralela al río es de 5€/metro, y el de la cerca para cada uno de los otros dos lados de 3€/metro. Calcula las dimensiones del área máxima que puede ser cercada.

13.- Se desea construir cajas de embalaje en forma ortoedro de base cuadrada de modo que sus tres dimensiones sumen 72. ¿Cuáles han de ser las dimensiones para que la capacidad de la caja sea máxima?

14.- De una piscina con forma de prisma de base cuadrada, sabemos que el coste del azulejo de las paredes es de 1€/m^2 y el coste del azulejo del suelo es de 4€/m^2, con un gasto total de 10.800€. Calcula las dimensiones de la piscina con volumen máximo.

15.- Una empresa fabrica diariamente x kilos del producto químico A ($0 \le x \le 4$) e y kilos del producto B. La relación entre x e y viene dada por $y = \frac{4-x}{5-x}$. Los beneficios obtenidos con A son de 2€/kilo y con B, de 18 €/kilo. ¿Cuántos kilos de A y B deben producirse para maximizar los beneficios? ¿Y para minimizar los beneficios? ¿Cuántos kilos de A y de B debemos fabricar para obtener unos beneficios de 15€?

16.- El coste de producción de x motos viene dado por función $2x^2 + 4x + 100$ euros. A esto debemos sumarle 400€ de alquiler del bajo comercial. El precio al que se vende cada una de estas motos es de x+214.

a) Halla la producción que maximiza el beneficio ¿A cuánto asciende este beneficio?

b) ¿Cuántas motos se deben vender para ganar 10.500€?

17- El consumo de gasolina de cierto automóvil, expresado en litros consumidos cada 100km. viene dado por la función $C(x) = 7{,}5 - 0{,}05x + 0'00025x^2$, siendo x la velocidad en km/h. Esta función es válida para velocidades comprendidas entre 25 y 175km/h.

a) ¿A qué velocidad se obtiene el mínimo consumo? ¿Cuál es ese consumo mínimo?

b) Determina las velocidades que corresponden al consumo máximo, y dicho consumo.

18*.- El número de personas $N(t)$ que acude un día a un centro médico, en función de las horas t que lleva abierto, es $N(t) = at^2 + bt$, con a y b $\in R$. Halla a y b sabiendo que el número máximo de personas fue de 128 y se produjo a las 4 horas de abrir.

19.- Considera la función $f(x) = ax^2 + bx + 11$, donde a y b son parámetros reales. Determina el valor de a y b para que $f(x)$ tenga un extremo (máximo o mínimo) relativo en el punto (2,5). ¿Es máximo o mínimo?

20.- Halla a, b, c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un mínimo en (0,1) y un máximo en (-1,2).

21*.- Calcula:

$a)\ \int_{-1}^{2} (x^3 + x - 3)dx \qquad b)\ \int_{1}^{2} \frac{x^2}{x^3+1}dx \qquad c)\ \int_{-1}^{0} e^{2x}dx \qquad d)\ \int_{1}^{2} \frac{2}{3x+1}dx$

$e)\ \int (e^{3x-1} + x\,)dx \qquad f)\ \int \left(2x^5 + \frac{x^4}{2}\right)dx \qquad g)\ \int \frac{1}{2x-1}dx \qquad h)\ \int \frac{6x-6}{x^2-2x}dx$

22*.- Halla el área comprendida entre las curvas $y = x^3 + x - 4$ e $y = -x^2 + 5x$.

23*.-Dada las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + 3$, halla:
a) El área de la región comprendida entre las gráficas de f y g. Representa dicha área
b) El área de la región comprendida entre las gráficas de f y g, $x = 0$ y $x = 1$.

24*.- Halla el área comprendida entre las curvas $y = x^3 + x - 4$ e $y = -x^2 + 5x$.

25*.- Halla el área comprendida entre las curvas $y = 2x^3 - 10x^2 + 10$ e $y = 2x$.

26*.- Halla el área comprendida entre las curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^3$.

27*.- Dada la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$, halla:
a) El área de la región comprendida entre la gráfica de f y el eje OX Represéntala
b) El área de la región comprendida entre la gráfica de f y el eje OX , $x = 0$ y $x = 2$

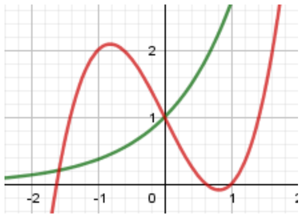
28*.- Halla el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 2$. Representa dicha área.

29.- Determina la función f(x) sabiendo que su gráfica pasa por el punto (1,2) y que su derivada es $f'(x) = \frac{1}{x^4} + 2x$.

30.- Dada $f(x) = x + \frac{a}{x}$, donde a es una constante, halla a sabiendo $\int_1^2 f(x) = 2{,}5$.

31.- Sea $f(x) = x^2 + bx$, donde b es una constante. Encuentra b sabiendo que hay una primitiva *F(x)*, cumpliendo: *F(0)=2 y F(3)=20.*

32*.- Dada la función $f(x) = x^2 - x - 2$, halla el área limitada por la gráfica de dicha función, el eje OX, y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.



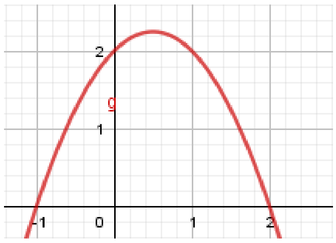
33*.- Dada las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $f(x) = x^3 - 2x + 1$, representadas al margen. Halla el área del reciento acotado por dichas gráficas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

34*.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} x+3 & si\ -1 \leq x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 & si\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$, se pide:

a) Halla su mínimo y máximo absoluto.

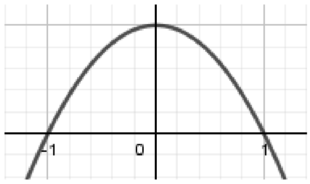
b) Representa gráficamente dicha función

c) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX , $x = -1$ y $x = 3$



35*.- La imagen del margen corresponde con la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + x + a$, donde $a \in R$. Halla el valor del parámetro a sabiendo que el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX es igual a $\frac{9}{2}\ u^2$.

36*.- La gráfica de la función $f(x) = x^2 + 4x + a$, con $a \in R$, no corta al eje OX. Calcula el valor de donde a para que el área encerrada por la gráfica, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 3$ valga $57u^2$.



37*.- La imagen del margen corresponde con la gráfica de la función $f(x) = ax^2 - a$, donde $a \in R$. Halla el valor del parámetro a sabiendo que el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX es igual a $4\ u^2$.

38*.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x+1 & si\ x < -3 \\ x^2 + 2x + 1 & si\ x \geq -3 \end{cases}$, se pide:

a) Representa gráficamente dicha función

b) Halla el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$ y la recta $y = 2x + 5$.

39*.- Dada la función $f(x) = e^{2x} + 1$, halla la función primitiva $F(x)$ que cumple $F(0) = 2$.

40.- Dada la función $f(x) = 25 - x^2$, halla el área limitada por la función f(x), el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 6$.

41.- Dada la función $f(x) = -x^2 + 5x - 4$, halla su recta tangente en el punto $x = 3$. Finalmente calcula el área comprendida entre f(x) y dicha recta tangente, y recta $x = 2$.

42*.- Calcula el área comprendida entre la curva $y = x^3 - 4x$ y el eje OX. Haz una representación gráfica de dicha área.

43.- La curva $y = a \cdot (-x^2 + 6x - 8)$, con a>0, delimita con el eje X un recinto de $12\,m^2$. Halla a.

44*.- Halla el valor del parámetro a para que se cumpla $\int_0^1 (ax^3 - 9x + 10)dx = 2a$.

45.- Halla el área encerrada por la curva $x \cdot y = 4$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.

46.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} 4 & si \quad x < -1 \\ -x+3 & si \quad -1 \le x \le 2 \\ x^2 - 3 & si \quad x > 2 \end{cases}$. Se pide:

a) El área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje X y las rectas $x = -2$ y $x = 3$
b) El mínimo absoluto de dicha función

47.- Dada la función $f(x) = x^2 - 5x + 8$, se pide:

a) La recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$, paralela a la bisectriz del primer cuadrante

b) El área de la región delimitada por $y = f(x)$, la recta tangente anterior y el eje Y.

48.- Sea la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + b & si \quad x \le -1 \\ 3x^2 + 4 & si \quad -1 < x \le 1 \\ ax^3 + 8 & si \quad x > 1 \end{cases}$, donde *a* y *b* son constantes.
a) Calcula *a* y *b* para que *f(x)* sea continua.
b) Calcula el área del recinto limitado por $y = f(x)$, el eje OX, $x = 0$, $x = 2$.

49.- El beneficio de una empresa, en función del número de artículos vendidos, x, viene dado por la función $B(x) = -x^2 + 9x - 16$. A partir de esta función se pide:

a) La función beneficio medio por cada artículo.
b) Halla el número de artículos que hacen máximo dicho beneficio medio y determina dicho beneficio medio.

50.- Se considera la función real de variable real: $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & si\ x < -1 \\ \frac{x^2 - b}{2} & si\ x \ge -1 \end{cases}$, se pide:

a) Calcula a y b para que f sea continua y derivable.
b) Para $a = 1$ y $b = 3$, representa la función $y = f(x)$ y halla su mínimo absoluto.

51.- Calcula el área del triángulo de vértices (0,2), (2,6) y (4,2).

52.- Calcula el área del triángulo de vértices (-1,1), (1,9) y (3,5).

53.- Halla el área del triángulo mixtilíneo de vértices A(2,4), B(-2,4) y C(-1,1), en el que las líneas AB y AC son rectas, mientras que la que une B y C es la curva $y = x^2$.

54.- Halla el área del triángulo mixtilíneo de vértices A(0,1), B(1,0) y C(-2,-1), en el que BC y AC son líneas rectas, mientras que la que une A y B es la curva $y = -x^2 + 1$.

55.- Lucía y Mª Jesús deciden plantar lechugas para sacarse unas pelillas en un bancal de tierra con forma de trapecio con vértices A(-1,2), B(2,5), C(4,5) y D(7,2). Sabemos que tiene una rentabilidad de 20€/m^2 plantado ¿Cuánto dinero recogerán?